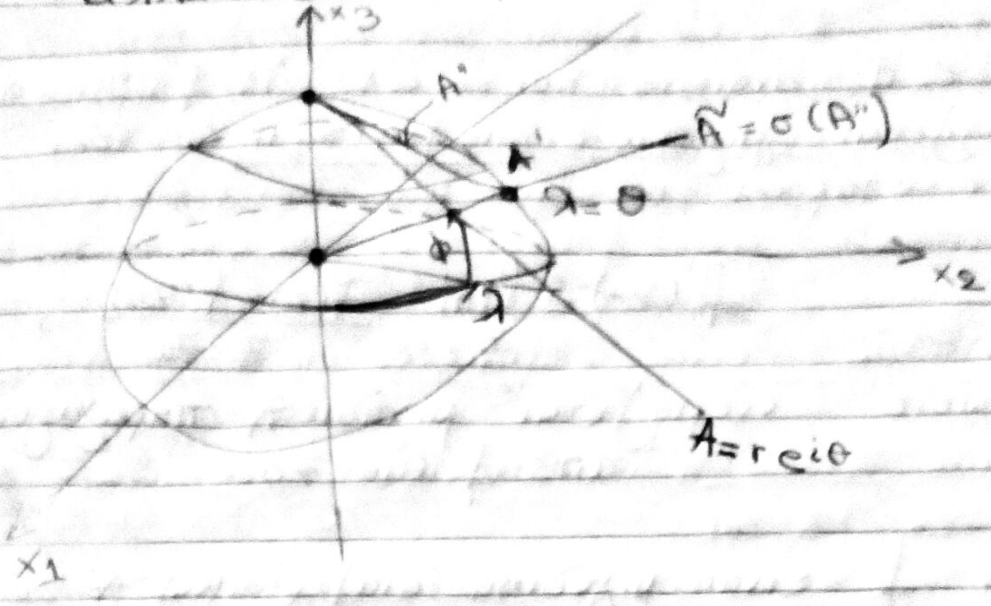
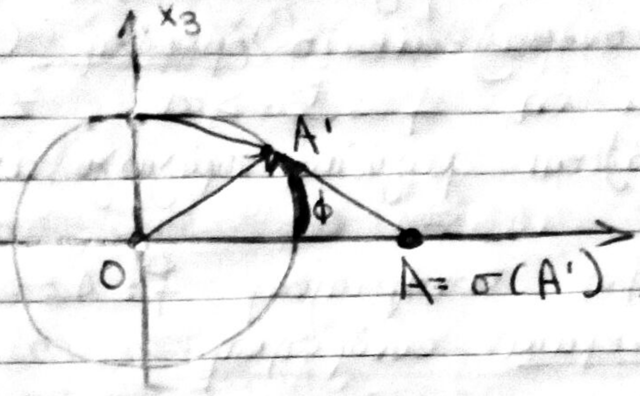
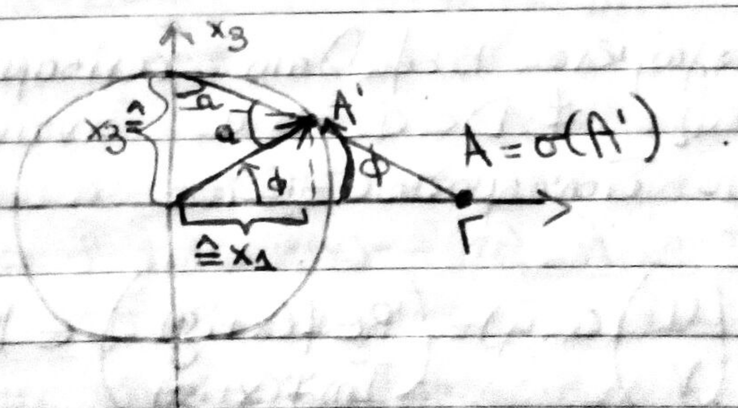
Μάθημα 9: 23/04/2020

* Στερεογραφική Προβολή (παράγραφος 2.5 σημειώσεις) αλλά έκανε όμως τα παρακάτω σχήματα.

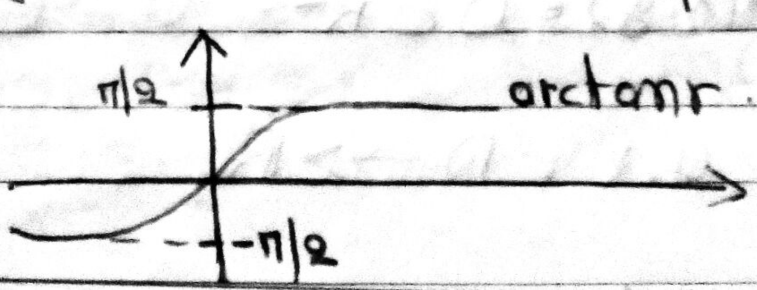






$$\tan a = \frac{r}{1} = r \iff a = \arctan r$$

$$a + a + \frac{\pi}{2} - \phi = \pi \iff a = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$



Κεφ.3 ΟΛΟΜΟΡΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός (3.1.1)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $z_0 \in D$. Η $f: D \to \mathbb{C}$ ονομάζεται μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0 αν υπάρχει το όριο:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

το οποίο ονομάζεται μιγαδική παράγωγος της f στο z_0.

* Αν η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη $\forall z_0 \in D$ τότε ονομάζεται ολόμορφη (στο D) και η $f': D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(z)$ ονομάζεται μιγαδική παράγωγο της f.

* Μια ολόμορφη συνάρτηση $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται ακέραια συνάρτηση.

* Στο προηγούμενο κεφάλαιο τονίσαμε ότι η μιγαδική συνάρτηση $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αντιστοιχεί μοναδικά στο διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x+iy) \\ \operatorname{Im} f(x+iy) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

με:

- $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$
- $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$
- $u, v : D \to \mathbb{R}$

Λήμμα 3.1.1

Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$: ανοιχτό, είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο $z_0 \in D$, αν και μόνο αν: υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \ , \quad \boxed{3.3}$$

στην οποία περίπτωση, το $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι μοναδικό και μάλιστα $\lambda = f'(z_0)$.

Απόδειξη (SOS).

Από τον ορισμό 3.1.1 ότι $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

Και κάνοντας κάποιες πράξεις και από ιδιότητες ορίων προκύπτει ότι:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0 .$$

Θέτοντας $\lambda = f'(z_0)$ προκύπτει το $\boxed{3.3}$, δηλαδή:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0 .$$

Πως βγαίνει όμως ότι $\lambda = f'(z_0)$???

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0) + \lambda(z - z_0)}{z - z_0}$$

$$= \underbrace{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0}}_{=0} + \lim_{z \to z_0} \frac{\lambda\cancel{(z - z_0)}}{\cancel{(z - z_0)}}$$

Άρα:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda.$$

Και από την μοναδικότητα του ορίου προκύπτει ότι το $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι μοναδικό και άρα f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη με $f'(z_0) = \lambda$ ■ (τέλος της απόδειξης)

Τα ακόλουθα είναι σημειώσεις μετά από απορίες

απορία

1. $$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{|z - z_0|} = \,?$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\cancel{|z - z_0|} \cdot e^{i\,Arg(z - z_0)}}{\cancel{|z - z_0|}}$$

$$= \lim_{z \to z_0} e^{i\,Arg(z - z_0)}$$

Αν θέσω $w = z - z_0 \Rightarrow w \to 0$

$$= \lim_{w \to 0} e^{i\,Arg\,w} \;\nexists \text{ αφού:}$$

Αν $w_n = \frac{1}{n} e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$

$\Rightarrow Arg\,w_n = \theta \longrightarrow \theta \Rightarrow e^{i\,Arg\,w_n} = e^{i\theta}$ σταθερό

Άρα, π.χ για $\theta = \pi$: $e^{i\theta} = -1$

ενώ για $\theta = 0 : e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \nexists$.

απορία

(2) $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \overset{???}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|}$$

Απαντηση

$$\lim_{z \to z_0} \left(\underbrace{\frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{|z-z_0|}}_{=0} + \frac{\lambda(z-z_0)}{|z-z_0|} \right)$$

?

Άρα: $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|}$$

Γενικα:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{|z-z_0|} = 0 \iff$$

$$\iff \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = 0$$

απορία

(3) $\lim_{z \to 0} \frac{z}{|z|} \nexists$??? γιατι ΣΧΕΤΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΤΟ

ΟΤΙ $\nexists \lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z}}{z}$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{|z|^2}{z^2} = \left(\frac{|z|}{z}\right)^2$$

Πως το γράφω όπως προς το $\bar{z}$???